DN4 : Les formules de la moyenne et la règle d'Abel

Leçons : 207, 422, 221 ; Référence : NGOU

Notations : On note $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et si I est un intervalle alors $C^1(I,\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications de classe C^1 sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$

<u>Théorème 1 :</u> (Première formule de la moyenne) Si $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et si g est une application de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ continue par morceaux et positive alors $\exists c \in [a,b], \int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$

Comme f est continue sur le compact $[a,b]$ on sait que $\exists (m,M) \in [a,b]$ tel que $m = \mathrm{Min}_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \mathrm{Max}_{x\in[a,b]} f(x)$ puis en utilisant la positivité de g il vient $m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g$, si $\int_a^b g = 0$ alors l'inégalité précédente montre que $\int_a^b fg = 0$ et le résultat est évident, si $\int_a^b g > 0$ alors on a $m \leq \left(\int_a^b fg\right)/\left(\int_a^b g\right) \leq M$ et en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction f on déduit que $\exists c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \left(\int_a^b fg\right)/\left(\int_a^b g\right)$ d'où le résultat

<u>Théorème 2 :</u> (Deuxième formule de la moyenne) Si $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ est décroissante positive et si $g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ alors $\exists c \in [a,b], \int_a^b fg = f(a)\int_a^c g$

On note G l'application $x \to \int_a^x g$ de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ et on sait que G est de classe C^1 sur $[a,b]$, en particulier puisque G est continue sur le compact $[a,b]$ on sait que $\exists (m,M) \in [a,b]^2$ tel que $m = \mathrm{Min}_{x\in[a,b]} G(x)$ et $M = \mathrm{Max}_{x\in[a,b]} G(x)$, on a $mf(b) \leq G(b)f(b) \leq Mf(b)$ et comme $-f'$ est positive sur $[a,b]$ on a aussi $mf(a) - mf(b) = m\int_a^b(-f') \leq -\int_a^b Gf' \leq M\int_a^b(-f') = Mf(a) - Mf(b)$, en additionnant les deux inégalités on obtient $mf(a) \leq G(b)f(b) - \int_a^b Gf' \leq Mf(a)$ mais une intégration par parties donne $\int_a^b fg = [fG]_a^b - \int_a^b Gf' = f(b)G(b) - \int_a^b Gf'$ ce qui prouve que $mf(a) \leq \int_a^b fg \leq Mf(a)$, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $f(a).G$ on déduit que $\exists c \in [a,b]$ tel que $f(a)G(c) = \int_a^b fg$ d'où le résultat

<u>Théorème 3 :</u> (Règle d'Abel) On suppose ici que $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, si $f \in C^1([a,b[,\mathbb{R})$ est décroissante avec $\lim_b f = 0$ et si $g \in \mathcal{C}([a,b[,\mathbb{R})$ est telle que $\exists M > 0, \forall x \in [a,b[, \left|\int_a^x g\right| \leq M$ alors $\int_a^b fg$ est convergente

Soit $\varepsilon > 0$, comme f est décroissante avec $\lim_b f = 0$ en particulier f est positive et on sait que $\exists A \in [a,b[$ tel que $f(A) \leq \varepsilon, \forall (x,y) \in [a,b[^2$ d'après le théorème 2 on sait que si $A \leq x < y$ alors $\exists c \in [x,y]$ tel que $\int_x^y fg = f(x)\int_x^c g$ donc $\left|\int_x^y fg\right| \leq f(x)\left|\int_a^c g - \int_a^x g\right| \leq f(x).2M \leq f(A).2M \leq \varepsilon.2M$, comme $\mathbb{R}$ est un espace complet on déduit que $\int_a^b fg$ est convergente d'après le critère de Cauchy

---

<u>DEVELOPPEMENT SOUS LA FORME D'UN EXERCICE :</u>

1) Montrer que si $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et si g est une application de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ continue par morceaux et positive alors $\exists c \in [a,b], \int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$
2) Montrer que si $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ est décroissante et si $g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ alors $\exists c \in [a,b], \int_a^b fg = f(a)\int_a^c g$
3) On suppose ici que $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, montrer que si $f \in C^1([a,b[,\mathbb{R})$ est décroissante avec $\lim_b f = 0$ et si $g \in \mathcal{C}([a,b[,\mathbb{R})$ est telle que $\exists M > 0, \forall x \in [a,b[, \left|\int_a^x g\right| \leq M$ alors $\int_a^b fg$ est convergente